

非线性对流斑图

李昊润*

北京大学物理学院 学号: 2200011477

(实验日期: 2025 年 4 月 10 日)

瑞利-贝纳德对流是耗散结构的一个典型例子, 能够相当直观地接触和理解非线性物理相关基本概念和理论. 本实验通过阴影法观察 2 mm 和 4 mm 水层中的对流斑图, 通过改变水层上下表面的温度差, 研究两个系统的临界温差和斑图随温差的变化规律, 研究了瑞利-贝纳德对流的特征, 并且探讨了非线性对流的产生和演化过程. 观察到对于 $d = 2\text{ mm}$ 的对流水层, 临界温度差约为 $\Delta T = 9.7^\circ\text{C}$; 对于 $d = 4\text{ mm}$ 的对流水层, 临界温度差约为 $\Delta T = 5^\circ\text{C}$, 通过对经典系统的实验观察体会和理解耗散结构理论以及相关的基本概念.

关键词: 热对流斑图, 非线性物理, 耗散结构理论

I. 引言

流体运动, 一般都是动力引起的. 但是, 由于流体内密度压力分布不均匀而产生的梯度力, 也是导致流体运动的原因之一, 所以因热力作用而使流体状态发生的差异, 也可以引起流体运动, 此种由热力作用驱动的流体运动称作热对流 (thermal flow). 热对流是自然界中常见的现象, 因为热力分布的不均匀, 造成了流体中的温差, 而温差又可引起流体的密度差, 于是在重力场中相应地出现浮力, 最后驱动热对流产生 [1].

1900 年, 贝纳对具有自由面-固壁底层的流体薄层进行了热对流实验, 观测到各种对流图形 (斑图), 现在把底层加热的流体薄层的对流问题称为贝纳问题 [1]. 后来瑞利对该系统做了理论分析, 固该系统被称为瑞利-贝纳德热对流系统. 物理学家们对该系统又做了更为详尽的研究, 以平衡态、近平衡态系统到远离平衡态的开放系统这些基本概念为出发点, 讨论不稳定性、涨落的作用, 提出了从无序到有序的临界转变过程, 也即耗散结构 (斑图) 的发生发展演化过程 [2]. 普利高津提出的耗散结构理论使人们对此类问题有了更系统更深入的认识, 这个系统直到现在也仍然吸引科学家们的关注 [3].

本实验中, 我们对一小薄层的对流水层, 在圆形边界条件下, 利用阴影法观察 2 mm 和 4 mm 水层中的对流斑图. 我们通过改变水层上下表面的温度差, 研究两个系统的临界温差和斑图随温差的变化规律, 研究了瑞利-贝纳德对流的特征, 并且探讨了非线性对流的产生和演化过程. 通过对经典系统的实验观察体会和理解耗散结构理论以及相关的基本概念.

* lhr@stu.pku.edu.cn; (86)15645049990

II. 理论

对于上下温度不同的两个无限大平板之间的热对流系统，满足鲍兴尼斯克 (Boussinesq) 条件，我们可以使用由纳维-斯托克斯 (Navier-Stokes, 简写 NS) 方程、流体连续性方程和热传导方程导出的热对流基本方程组进行分析. 对于上述方程组的定态解我们需要了解其稳定性情况，常用的办法就是线性稳定性分析，通过对定态解加微扰，讨论微扰的线性发展. 关于微扰满足的方程组无量纲化后，边条件中一个重要的无量纲参数就是瑞利 (Rayleigh) 数：

$$Ra \equiv \frac{g\alpha d^3 \Delta T}{\kappa\gamma} \propto d^3 \Delta T. \quad (1)$$

其中 α, γ, κ 分别为流体的热膨胀系数、粘度和热导率， d 为流体层的厚度， ΔT 为上下温度差， g 为重力加速度. 线性稳定性分析方法是将微扰方程中的所有变量看作小量，忽略非线性项. 如果我们假设有 z 方向的初始微扰 u_z ：

$$u_z = A(z)e^{i(k_x x + k_y y) + st}, \quad |k| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} = \alpha. \quad (2)$$

求解结果中要看 s 的实数部分正负号如何，若 s 的实数部分为负，则微扰随时间衰减，原定态解稳定；若 s 的实数部分为正，则微扰随时间越来越大，原定态解不稳定.

对于微扰方程组来说， Ra 是一个可变参数，和温度差成正比. 在实验中我们知道温度差较低时，均匀态稳定，当温度差高于一临界值时，均匀态不稳定，系统出现斑图结构. 因此通过线性稳定性分析方法可求出定态解（即均匀态）从稳定到不稳定的临界参数. 数值计算的结果显示有如下临界参量：

$$R_c = 1707.76. \quad (3)$$

当 $Ra < R_c$ 时，系统中随机出现的扰动噪声会随时间衰减，以保持定态解的稳定性；而当 $Ra > R_c$ 时，满足条件的的部分扰动噪声就会随时间放大，非线性项将发挥重大作用. 但通常也只考虑弱非线性作用，常用的方法是多尺度分析，可得扰动振幅满足的非线性方程. 而由于非线性项的贡献，系统会形成稳定的对流斑图，如 [图 1](#) 所示. 但是当 Ra 过大时，系统会失去稳定，进入湍流状态.

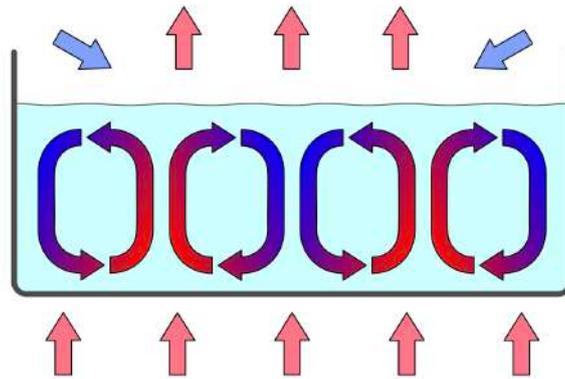


图 1. 瑞利-贝纳德对流示意图

III. 实验装置

本实验的实验装置如图 2 所示. 研究对象是一小薄层的对流水层, 对流水层的上方是降温水层, 其间的接触面是蓝宝石片, 其在透明介质中具有相对较高的热导率. 降温水层其他部分是有机玻璃, 透明介质的选用是为了观察对流水层内的斑图, 降温水层通过泵将冷水泵入流过蓝宝石片带走热量, 来稳定对流水层的上表面温度. 蓝宝石片一侧放置了 Pt100, 用于测量对流水层的上表面温度, 由温控仪 A 显示温度. 热对流水层的下表面是黄铜盘的镀金平面, 黄铜下面放置硅胶加热片, 通电后对黄铜进行加热, 黄铜的镀金平面作为反射镜. 黄铜盘下用另一个 Pt100 来监测温度, 由温控仪 B 显示. 热对流水层的上下两个表面温度差的控制和改变是利用通过硅胶加热片的电流来决定, 从而改变对流水层内部的流动状态.

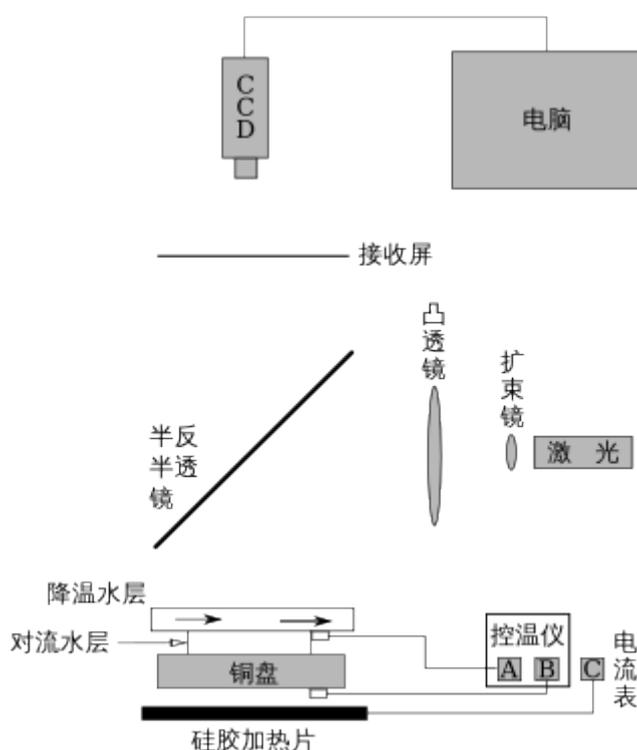


图 2. 实验装置示意图

实验中利用阴影法来观察对流水层内的流动结构及斑图. 具体地说, 用激光器做光源, 经扩束镜扩束, 再经凸透镜形成准平行光光束, 利用半反半透镜和铜盘镀金表面反射后将出射光打到接收屏上, 用 CCD 拍摄图像并存入电脑. 阴影法的大致原理可以类比透镜的工作原理, 流体热胀冷缩, 冷的部分密度大折射率高, 热的部分密度小折射率低. 在等厚的条件下, 冷的部分光程长, 具有和凸透镜一样的聚光性质, 在图样上显示为亮纹; 而热的部分光程短, 具有和凹透镜一样的散光性质, 显示为暗纹. 对流水层出现流动后, 各处温度不均匀密度不均匀, 导致出射平行光光强分布不均匀, 从而显示出斑图.

在实验过程中, 我们首先要调整激光光路, 使得 CCD 成像区域中心被均匀照亮.

其次，选取 $d = 2\text{ mm}$ 的橡胶圈¹放铜盘和蓝宝石之间，并在其中加入水，形成 2 mm 的水层。静置 1 h ，使水层进入稳定的平衡状态作为系统的初条件。然后，通过选择合适的步长逐渐增加硅胶加热片的电流，每次增加电流后待水层温度差稳定²之后，观察 CCD 成像并拍照记录，可以明显观察到斑图图像的变化。最后，改用 4 mm 的橡胶圈，将水层厚度调整为 $d = 4\text{ mm}$ ，重复上述步骤，同样观察斑图的变化。

IV. 结果与讨论

实验装置在未加电流时的初温度为 $T_{\text{上}} = 25.9^\circ\text{C}$, $T_{\text{下}} = 27.5^\circ\text{C}$ ，温度差 $\Delta T = 1.6^\circ\text{C}$ 。

图 3 给出了 2 mm 对流水层稳定温度差时 CCD 所拍摄到的图像。我们使电流从 $I = 700\text{ mA}$ 逐渐加大，随着电流的增加，对流水层的上下两个表面的温度也会相应地增加，只是下表面温度增长比上表面温度增长要多，从而使得对流水层两个表面的温度差逐渐增大。图像中黑色的条带对应于热水上升，白色的条带对应于冷水下沉，黑白条带之间的区域呈现均匀结构，对应的是水平方向的输运。随着温度差的升高，我们可以看到斑图从无到有，从同心圆到六边形的变化。在图 3(c) 已经能够看到有斑图出现，所以对于 $d = 2\text{ mm}$ 的对流水层，临界温度差约为 $\Delta T = 9.7^\circ\text{C}$ 。

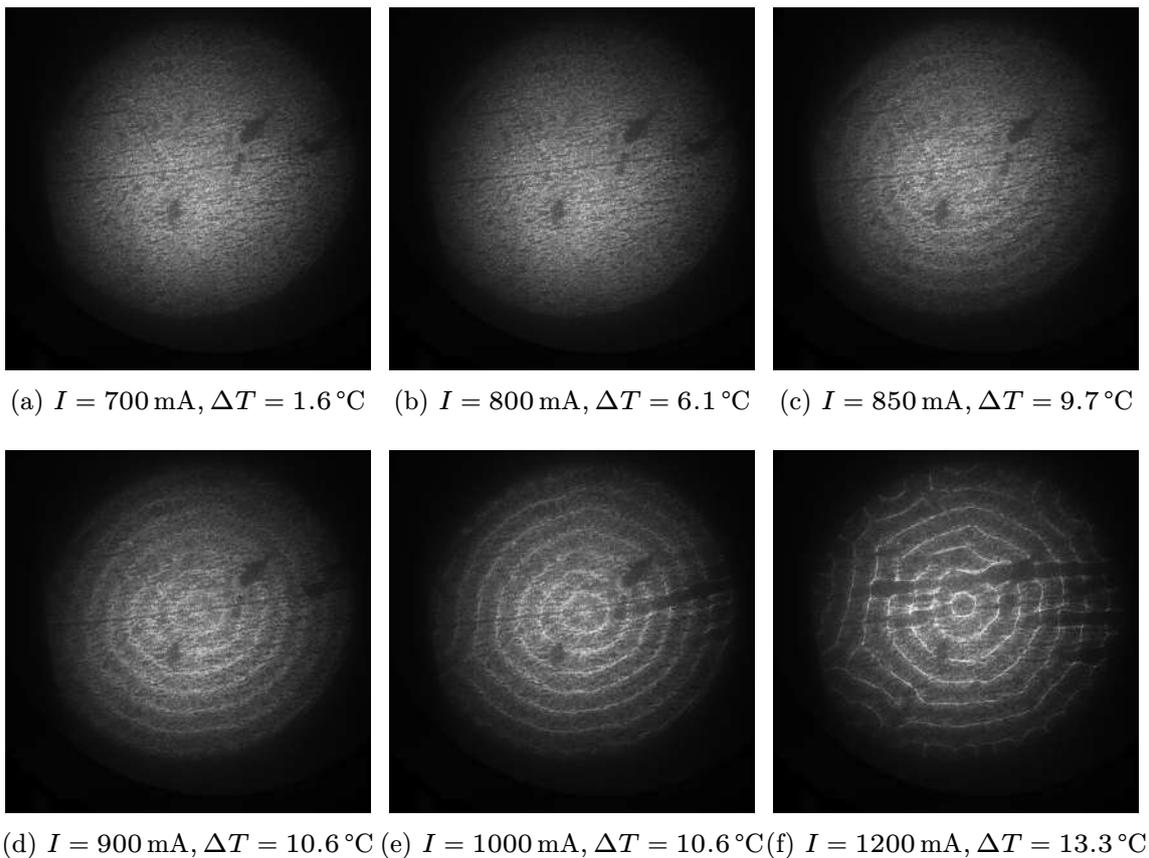


图 3. 不同温度差下 CCD 拍摄得到的斑图。水层厚度 $d = 2\text{ mm}$ 。

¹ 圆形的橡胶圈对于系统给出一个圆形边界条件。

² 一般调电流之后 10 min 即可达到新的稳定状态。

随后，随着温度差的增大，斑图越来越明显，阴暗分界越来越显著。且在温度差过大时，从图 3(f) 中能够看到，斑图结构发生明显变化并产生一定结构性破坏。同时，实验过程中观察到，斑图的图样对外界扰动响应不大，有比较强的鲁棒性。

图 4 给出了 4 mm 对流水层稳定温度差时 CCD 所拍摄到的图像。随着温度差的升高，我们可以看到斑图从无到有，从稳定到崩溃的变化。在图 4(b) 已经能够看到有斑图出现，所以对于 $d = 4\text{ mm}$ 的对流水层，临界温度差约为 $\Delta T = 5^\circ\text{C}$ 。水层的增厚会使得临界温度减小，定性地符合理论的预测，但是根据 $Ra \propto d^3 \Delta T$ ，4 mm 水层的临界温度理论上应为 2 mm 的 1/8，但是在实验中观测到的理解温度比理论预测值大不少。这里给出如下两种原因：

1. 理论得到的结果是对无穷大的均匀对流薄层的理想模型的计算结果，而实验中是具有一个有限的圆形边界条件，边界处散热的影响不可忽略，且实验中的对流水层难免存在由初条件等产生的不均匀性，进而导致理论的预测失效。
2. 我们用 CCD 图像判断临界点的方法依赖于观察者对于图像中是否存在可分辨条纹的判断，必然具有一定的系统误差，导致实验数据不够准确。

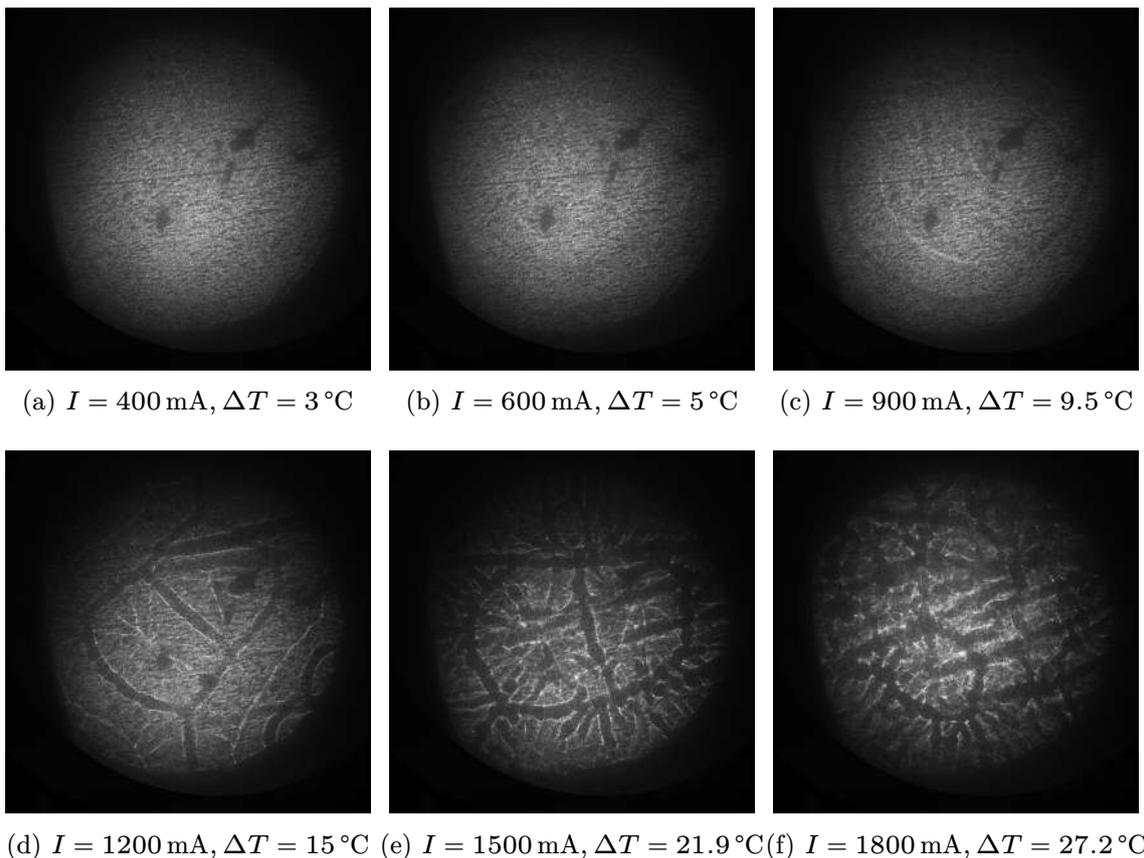


图 4. 不同温度差下 CCD 拍摄得到的斑图。水层厚度 $d = 4\text{ mm}$ 。

随后，随着温度差的增大，对称的斑图构型逐渐崩溃，先出现一些分支结构，而后再继续出现更小的分支结构，直至进入湍流状态，斑图不再稳定。此过程中系统远离平衡态，热对流随温差的增大愈发激烈。这种远离平衡态的斑图具有自相似性，即局部和整体具有相似的特征，类似于分形几何的图样。

V. 结论

本实验通过阴影法观察到了 2 mm 和 4 mm 水层中瑞利-贝纳对流斑图的形成和演化, 观察到了系统的临界点和非线性对流的特征. 2 mm 水层的临界点约为 $\Delta T = 9.7^\circ\text{C}$, 4 mm 水层的临界点约为 $\Delta T = 5^\circ\text{C}$. 虽然定量上和理论预测不太符合, 但是依然观察到了随着对流层厚度的增加, 系统的临界温度差会减小. 同时观察到了随着系统温度差的增加, 斑图会变得更加复杂, 最终进入湍流状态, 使我们对非线性动力学、耗散结构理论和热对流都有了非常直观的认识. 但是, 由于时间有限, 本报告并未能对实验现象做出更加定量的分析. 将来的实验还可以通过利用非线性动力学和耗散结构理论对实验现象进行进一步的分析讨论.

致谢

感谢陈屹帆同学协力完成了本实验, 感谢周路群老师在实验中的讲解和指导, 老师关于耗散结构和非线性动力学的知识的介绍和讲解拓宽了我的视野, 丰富了对于自然界的认识.

-
- [1] 吴思诚, 荀坤, 近代物理实验, 4th ed. (高等教育出版社, 北京, 2015).
 - [2] 周路群, 冉书能, and 贾春燕, 物理实验 **32**, 1 (2012).
 - [3] G. Ahlers, S. Grossmann, and D. Lohse, *Reviews of modern physics* **81**, 503 (2009).

附录 A: 思考题

1. 随着温差的升高, 可以看到黑白结构 (即斑图) 的出现, 黑白的区域如何对应水层的流动情况?

斑图中白色的部分为冷水下沉, 黑色的部分为热水上升, 而黑白相间的部分就是一个对流元胞, 代表一个完整的对流循环 (如 图 1 所示). 这是因为在室温下, 水的密度随温度的升高而降低, 从而水的折射率也随温度的升高而降低, 冷的部分密度大折射率高, 热的部分密度小折射率低. 在等厚的条件下, 冷的部分光程长, 具有和凸透镜一样的聚光性质, 在图样上显示为亮纹; 而热的部分光程短, 具有和凹透镜一样的散光性质, 显示为暗纹.

2. 斑图出现的临界点如何确定? 如何根据所观察的现象确定临界点?

当我们能够在 CCD 图像中看到可分辨的黑白条纹的时候, 说明系统到达了临界点, 当温度稳定后可以确定临界点温度差.

3. 当水层换成 4 mm 时, 考虑临界点会如何改变?

因为 $Ra \propto d^3 \Delta T$, 所以当水层从 2 mm 换成 4 mm 时, 理论上临界温度差是原来的 1/8 倍. 但是实验过程中, 临界点的变化并不会这么大, 不过定性上临界温度差依然会随着水层厚度的增加而减小.

4. 如何确定斑图的空间特征尺度?

在系统处于稳定状态的时候, CCD 中的图像是一个个同心圆 (或者近似为同心圆), 我们可以通过对这些同心圆的半径进行拟合, 从而得到斑图的空间特征尺度.

5. 斑图的空间特征尺度与对流水厚度的关系如何?

斑图的空间特征尺度与对流水厚度成正比. 这是因为对流水层的厚度增加, 会使得对流元胞的尺度也增大, 从而使得斑图的空间特征尺度也增大. 斑图的水平尺寸大致和对流水厚度成正比.