# 测定金属的杨氏模量实验报告

2200011477 李昊润 四组 10 号

2023 年 11 月 14 日

## 1 数据及处理

### 1.1 给定数据与预先估计数据

给定数据：$g = 9.801\,\mathrm{m/s^2}$
预先估计数据：$L \approx 1000\,\mathrm{mm}$ $d \approx 0.3\,\mathrm{mm}$ $\delta L \approx 0.0x\,\mathrm{mm}$

### 1.2 测量砝码质量及其不确定度分析

表 1: 测量砝码质量数据表

| 项目 | $m_1$ | $m_1+m_2$ | $m_1+m_2+m_3$ | $m_1+m_2+m_3+m_4$ | $m_1+m_2+m_3+m_4+m_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 质量/g | 200.03 | 400.08 | 600.17 | 800.13 | 1000.12 |
| 项目 | $m_6$ | $m_6+m_7$ | $m_6+m_7+m_8$ | $m_6+m_7+m_8+m_9$ | $\overline{m}$ |
| 质量/g | 200.09 | 399.99 | 599.98 | 800.00 | 200.01 |

仪器允差：$e_m = 0.01\,\mathrm{g}$
平均值的标准差:

$$\sigma_{\overline{m}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(m_i - \overline{m})^2}{n(n-1)}} = \frac{s_m}{\sqrt{n}} = \frac{0.061441}{\sqrt{9}} = 0.020\,480\,\mathrm{g} \tag{1}$$

方和根合成不确定度：

$$\sigma_m = \sqrt{\sigma_{\overline{m}}^2 + (\frac{e_m}{\sqrt{3}})^2} = 0.02\,\mathrm{g} \tag{2}$$

砝码质量：$m = (200.01 \pm 0.02)\,\mathrm{g}$

### 1.3 观测金属丝受外力拉伸后的伸长变化

由表 1中数据得到每次导致金属丝收到外力的砝码质量，进而观测金属丝受外力拉伸后的伸长变化：

表 2: 测量金属丝受外力拉伸后的伸展变化数据表

| i | $m_i$/g | $r_i$/mm | $r'_i$/mm | $\overline{r}$/mm | $\delta L=(\overline{r}_i-\overline{r}_{i+5})$/cm | $\delta L_i=(\overline{r}_0-\overline{r}_i)$/cm |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.00 | 5.10 | 5.08 | 5.090 | 0.0630 | —— |
| 1 | 200.03 | 4.96 | 4.94 | 4.950 | 0.0600 | 0.0140 |
| 2 | 400.08 | 4.83 | 4.81 | 4.820 | 0.0590 | 0.0270 |
| 3 | 600.17 | 4.70 | 4.68 | 4.690 | 0.0580 | 0.0400 |
| 4 | 800.13 | 4.59 | 4.56 | 4.575 | 0.0575 | 0.0515 |
| 5 | 1000.12 | 4.47 | 4.45 | 4.460 | —— | 0.0630 |
| 6 | 1200.21 | 4.35 | 4.35 | 4.350 | —— | 0.0740 |
| 7 | 1400.11 | 4.23 | 4.23 | 4.230 | —— | 0.0860 |
| 8 | 1600.10 | 4.11 | 4.11 | 4.110 | —— | 0.0980 |
| 9 | 1800.12 | 4.00 | 4.00 | 4.000 | —— | 0.1090 |

定义最小二乘法处理数据时 $\delta L$ 的平均值为 $\overline{\delta L_i}$:

$$\overline{\delta L_i}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\delta L_i}{n}=\frac{1.09}{9}=0.121\,\mathrm{mm} \tag{3}$$

金属丝所受外力:

$$F=\overline{m}g=200.01\times10^{-3}\times9.801=1.96\,\mathrm{N} \tag{4}$$

## 1.4 测量金属丝长 $L$ 和金属丝直径 $d$ 及其不确定度分析

$L=79.20\,\mathrm{cm}$
仪器允差: $e_L=0.15\,\mathrm{cm}$
不确定度:

$$\sigma=\frac{e_L}{\sqrt{3}}=0.09\,\mathrm{cm} \tag{5}$$

金属丝长度: $L=(79.20\pm0.09)\,\mathrm{cm}$

表 3: 测量金属丝直径数据表

| i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | $\overline{d'}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $d'$/mm | 0.327 | 0.329 | 0.327 | 0.322 | 0.321 | 0.320 | 0.323 | 0.327 | 0.321 | 0.320 | 0.324 |

仪器允差: $e_{d'}=0.004\,\mathrm{mm}$
平均值的标准差:

$$\sigma_{\overline{d'}}=\sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(d'_i-\overline{d'})^2}{n(n-1)}}=\frac{s_{d'}}{\sqrt{n}}=\frac{3.43\times10^{-3}}{\sqrt{10}}=1.08\times10^{-3}\,\mathrm{mm} \tag{6}$$

方和根合成不确定度:

$$\sigma_d=\sigma_{d'}=\sqrt{\sigma_{\overline{d'}}^2+(\frac{e_m}{\sqrt{3}})^2}=0.002\,\mathrm{mm} \tag{7}$$

修正零点前金属丝直径：$d' = (0.324 \pm 0.002)\,\mathrm{mm}$

金属丝直径：$d_0 = 0.000\,\mathrm{mm}$ $\quad \overline{d} = \overline{d'} - d_0 = (0.324 \pm 0.002)\,\mathrm{mm}$

### 1.5 逐差法处理数据及其不确定度分析

由表 2中数据进行逐差法处理数据：

$$\overline{\delta L} = \frac{(\overline{r}_0 + \overline{r}_1 + \overline{r}_2 + \overline{r}_3 + \overline{r}_4) - (\overline{r}_5 + \overline{r}_6 + \overline{r}_7 + \overline{r}_8 + \overline{r}_9)}{25} = \frac{0.2975}{25} = 0.0119\,\mathrm{cm} = 0.119\,\mathrm{mm} \tag{8}$$

逐差 $\delta L$ 当作直接测量量, 以分析 $\overline{\delta L}$ 的不确定度：

仪器允差：$e_{\delta L} = 0.05\,\mathrm{mm}$

逐差 $\delta L$ 的不确定度：

$$\sigma_{\delta L} = \frac{e_{\delta L}}{\sqrt{3}} = 0.0289\,\mathrm{mm} \tag{9}$$

$\delta L$ 的不确定度：

$$\sigma_{\delta L} = \sqrt{(\frac{1}{25}\sigma_{\delta L})^2 \times 5} = 0.002\,\mathrm{mm} \tag{10}$$

金属丝伸展变化长度：$\delta L = (0.119 \pm 0.002)\,\mathrm{mm}$

$$E = \frac{4mgL}{\pi d^2 \delta L} = \frac{4 \times 1.96 \times 0.7920}{\pi \times (3.24 \times 10^{-4})^2 \times 1.19 \times 10^{-4}} = 1.58 \times 10^{11}\,\mathrm{Pa} \tag{11}$$

$E$ 的相对不确定度：

$$\frac{\sigma_E}{E} = \sqrt{(\frac{1}{L}\sigma_L)^2 + (\frac{1}{m}\sigma_m)^2 + (-\frac{2}{d}\sigma_d)^2 + (-\frac{1}{\delta L}\sigma_{\delta L})^2} = 0.021 \tag{12}$$

$E$ 的不确定度：

$$\sigma_E = \frac{\sigma_E}{E} \times E = 0.03 \times 10^{11}\,\mathrm{Pa} \tag{13}$$

杨氏模量：$E = (1.58 \pm 0.03) \times 10^{11}\,\mathrm{Pa}$

### 1.6 最小二乘法处理数据及其不确定度分析

由杨氏模量的定义可以看出 $\delta L$ 和 $m$ 的线性关系，以精度较高的 $m$ 为自变量，$\delta L$ 为因变量，由表 2中数据进行最小二乘法线性拟合, 并作图如图 1所示：

$$\delta L = \frac{4gL}{\pi d^2 E} m = km + b \tag{14}$$

拟合, 得:$k = 0.590\,\mathrm{mm/kg}$ $\quad r = 0.9997377678$

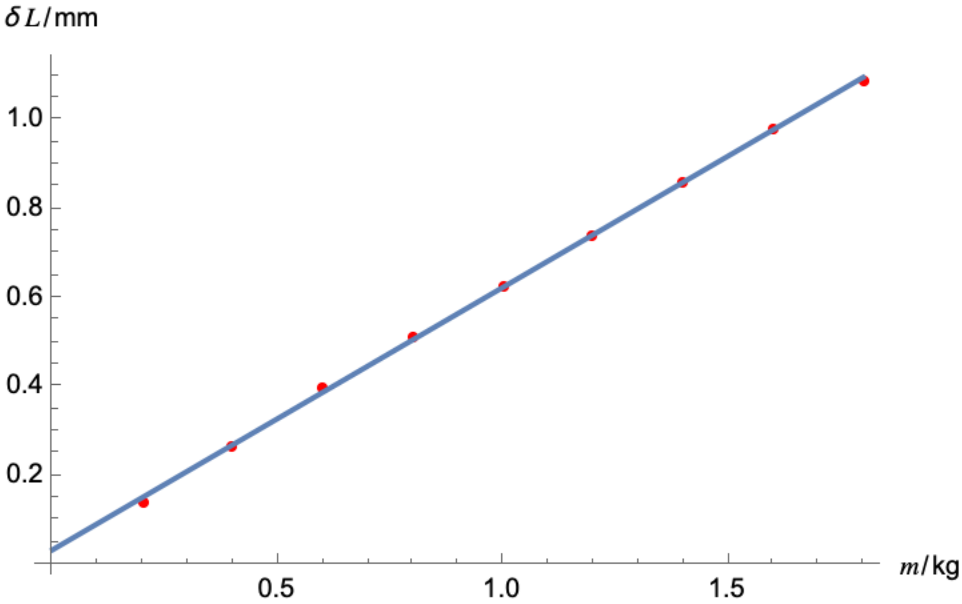


图 1: $\delta L - m$ 线性关系图

斜率不确定度:
来自拟合:

$$\sigma_{k,A} = k\sqrt{\frac{\frac{1}{r^2}-1}{n-2}} = 5.11 \times 10^{-3}\,\mathrm{mm/kg} \tag{15}$$

来自 $\delta L$ 允差:

$$\sigma_{k,B} = \frac{\frac{e_{\delta L}}{\sqrt{3}}}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(\delta L_i - \overline{\delta L_i})^2}} = \frac{\frac{0.05}{\sqrt{3}}}{\sqrt{0.8347}} = 0.0316\,\mathrm{mm/kg} \tag{16}$$

方和根合成斜率不确定度:

$$\sigma_k = \sqrt{\sigma_{k,A}^2 + \sigma_{k,B}^2} = 0.0320\,\mathrm{mm/kg} \tag{17}$$

$$E = \frac{4gl}{\pi d^2 k} = \frac{4 \times 9.801 \times 0.7920}{\pi \times (3.24 \times 10^{-4})^2 \times 0.5896 \times 10^{-3}} = 1.60 \times 10^{11}\,\mathrm{Pa} \tag{18}$$

$E$ 的相对不确定度:

$$\frac{\sigma_E}{E} = \sqrt{(\frac{1}{L}\sigma_L)^2 + (-\frac{2}{d}\sigma_d)^2 + (-\frac{1}{k}\sigma_k)^2} = 0.054 \tag{19}$$

$E$ 的不确定度:

$$\sigma_E = \frac{\sigma_E}{E} \times E = 0.09 \times 10^{11}\,\mathrm{Pa} \tag{20}$$

杨氏模量: $E = (1.60 \pm 0.09) \times 10^{11}\,\mathrm{Pa}$

## 2 分析与讨论

比较两种方法计算杨氏模量的不确定度，最小二乘法处理数据的不确定度明显大于逐差法处理数据的不确定度，通过分析不确定度计算的过程发现 $\sigma_{k,B}$ 在其中起主要作用，因为最小二乘法处理数据中 $\overline{\delta L_i}$ 为 9 组数据的算数平均值，$\overline{\delta L_i} = \frac{r_0 - r_9}{9}$ 只有 $r_0$，$r_9$ 两个数据起作用，其他的数据都没有利用，失去了在大量数据中求平均值以减小误差的作用，影响结果的准确性。

## 3 收获与感想

本次实验要求我们通过两种方法分别分析数据计算杨氏模量及其不确定度并进行比较，运用两种不同方法进行比较促进了自己的思考，分析讨论了造成其不确定度不同的原因，同时，进行了大量的对于不确定度分析的计算，通过实际实验在实践中复习了“测量误差与数据处理”一章中的内容，为今后的实验中的误差分析与数据处理打下了坚实的基础，也使我更加深刻地认识到了实验工作的细致与严密，希望我能够在今后的实验中，学习和体会前辈物理学家进行物理实验的精神与思想，能够真切益于我的物理学学习甚至生活之中。